



TITLE:

# Error Analysis of Galerkin Approximations for Compactly Perturbed Equations (Numerical Analysis and New Information Technology)

AUTHOR(S):

土屋, 卓也

---

CITATION:

土屋, 卓也. Error Analysis of Galerkin Approximations for Compactly Perturbed Equations (Numerical Analysis and New Information Technology). 数理解析研究所講究録 2004, 1362: 205-214

ISSUE DATE:

2004-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/25295>

RIGHT:

# Error Analysis of Galerkin Approximations for Compactly Perturbed Equations

Takuya TSUCHIYA<sup>1</sup> (土屋 卓也)<sup>2</sup>

この論文では、主要項に compact 項を付け加えた線形あるいは非線形方程式に対する Galerkin 近似の誤差について考察する。述べる結果はすでに知られているものだが、主要な有限要素法の教科書には書かれていないようなので、ここで説明し、特に若い人の注意を喚起したい。なお、この論文の述べた内容を、講義ノートとしてまとめたものを、[7]においた。

## 1 inf-sup 条件, 離散 inf-sup 条件

まず、良く知られている結果を復習しよう。この節の定理の証明は、文献 [1] を参照のこと。  $X, Y$  を Hilbert 空間とし、その内積, norm を,  $\|\cdot\|_X, (\cdot, \cdot)_X, \|\cdot\|_Y, (\cdot, \cdot)_Y$  のように表す。また、 $Y$  の双対空間 (dual space) を  $Y'$  と表す。さて、 $X, Y$  上定義された双線形写像 (bilinear form)  $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  が連続であるとは、 $a$  が次の条件を満たすことであった:

$$(1.1) \quad \exists M > 0, \quad |a(x, y)| \leq M \|x\|_X \|y\|_Y, \quad \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

連続双線形写像  $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  と与えられた  $f \in Y'$  に対して、次の方程式を考える:

$$(1.2) \quad \text{Find } x \in X \quad \text{such that} \quad a(x, y) = f(y), \quad \forall y \in Y.$$

この方程式(1.2)が任意の  $f \in Y'$  について一意解を持つための必要十分条件は、次の定理で与えられる [1, Theorem 5.2.1]:

**定理 1.1** 連続双線形写像  $a(x, y)$  に対して、方程式(1.2)が任意の  $f \in Y'$  に対して一意解を持つためには、 $a$  が次の 2 つの条件を満たすことが必要十分である:

$$(1.3) \quad C_1 := \inf_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X=1}} \sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\|_Y \leq 1}} |a(x, y)| > 0$$

$$(1.4) \quad \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X=1}} |a(x, y)| > 0, \quad \forall y \in Y, \quad y \neq 0.$$

さらに、(1.2)の解  $x \in X$  は、次の評価式を満たす:  $\|x\|_X \leq \|f\|_{Y'}/C_1$ .  $\square$

<sup>1</sup>Department of Mathematical Sciences, Ehime University

<sup>2</sup>愛媛大学理学部数理科学科, tsuchiya@math.sci.ehime-u.ac.jp

次に,  $X_h \subset X, Y_h \subset Y$  を有限次元部分空間とすると, (1.2)に対する Galerkin 近似は,

$$(1.5) \quad \text{Find } x_h \in X_h \quad \text{such that} \quad a(x_h, y_h) = f(y_h), \quad \forall y_h \in Y_h.$$

で定義される. この時, (1.5)の解 (Galerkin 解と呼ぶ)  $x_h \in X_h$  の誤差について, 次の定理が成り立つ [1, Theorem 6.2.1]:

**定理 1.2**  $X, Y$  を Hilbert 空間とし, 連続双線形写像  $a: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  は, 定理 1.1 の条件 (1.3), (1.4) を満たすとする. また, 有限次元部分空間  $X_h \subset X, Y_h \subset Y$  に対して,

$$(1.6) \quad C_h := \inf_{\substack{x_h \in X_h \\ \|x_h\|_X=1}} \sup_{\substack{y_h \in Y_h \\ \|y_h\|_Y \leq 1}} |a(x_h, y_h)| > 0$$

$$(1.7) \quad \sup_{\substack{x_h \in X_h \\ \|x_h\|_X=1}} |a(x_h, y_h)| > 0, \quad \forall y_h \in Y_h, \quad y_h \neq 0.$$

が成り立つと仮定する. この時, 定理 1.1 より, 任意の  $f \in Y'$  に対して方程式 (1.2), (1.5) はそれぞれ一意解  $x^0 \in X, x_h^0 \in X_h$  を持つ. さらに, 誤差  $\|x^0 - x_h^0\|_X$  に対して, 次の評価が成り立つ:

$$(1.8) \quad \|x^0 - x_h^0\|_X \leq \left(1 + \frac{M}{C_h}\right) \inf_{w_h \in X_h} \|x^0 - w_h\|_X.$$

ここで,  $M$  は (1.1) に出て来る正定数である.  $\square$

**系 1.3** 定理 1.2 の条件が成り立っているとせよ. さらに  $h > 0$  に依存しない定数  $\eta$  が存在し,

$$(1.9) \quad \inf_{\substack{x_h \in X_h \\ \|x_h\|_X=1}} \sup_{\substack{y_h \in Y_h \\ \|y_h\|_Y \leq 1}} |a(x_h, y_h)| =: C_h \geq \eta > 0$$

となっていると仮定する. このとき,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{w_h \in X_h} \|x^0 - w_h\|_X = 0 \quad \implies \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|x^0 - x_h^0\|_X = 0$$

が成り立つ.  $\square$

**Remark:** (1) 条件 (1.3) を, **inf-sup 条件**, **Babuška-Brezzi-Kikuchi 条件** などと呼ぶ. 条件 (1.9) は, **離散 inf-sup 条件** と呼ばれ, 有限要素解析のさまざまな場面で現れる重要なものである.

(2) 定理 1.2 の証明を見ると, Galerkin 解  $x_h^0$  は, 真の解  $x^0$  をある射影作用素  $\Pi_h$  で射影したものであることがわかる:  $x_h^0 = \Pi_h x^0$ . また, 次の評価が成り立つ:

$$(1.10) \quad \|\Pi_h\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq \frac{M}{C_h} \leq \frac{M}{\eta}.$$

よって, 補題 1.3 の仮定 (1.9) が成り立っていれば,  $\|\Pi_h\|_{\mathcal{L}(X, X)}$  は  $h$  によらず一様に有界である.

## 2 Compact 作用素による摂動

前節では、方程式(1.2)の Galerkin 近似の誤差について復習した。この節では、(1.2)に compact 項を付け加えた方程式の Galerkin 近似を考えるが、その前に、Fink-Rheinboldt により与えられた Galerkin 解の特徴付けを紹介する [4]。

連続双線形写像  $a$  は、前節の定理の仮定を満たすとする。線形作用素  $A \in \mathcal{L}(X, Y')$  を、 $a$  を用いて

$$\langle Ax, y \rangle := a(x, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

と定義すると、 $A$  は  $X$  と  $Y'$  の間の同型写像を与える。すると(1.2)は、 $Y'$  上の方程式  $Ax = f$  に書き直すことができ、また一意解  $x$  は、 $x = A^{-1}f$  と書ける。

有限次元部分空間  $X_h \subset X$ ,  $Y_h \subset Y$  を考える。この時、定理 1.2 の条件が成り立つとすると、上の(1.2)の Galerkin 近似方程式(1.5) は、一意解  $x_h \in X_h$  を持つ。この対応  $X \ni x \mapsto x_h \in X_h$  により、射影作用素  $\Pi_h : X \rightarrow X_h$  を定義できた。Galerkin 解  $x_h \in X_h$  は、射影  $\Pi_h$  と作用素  $A$  を使って、 $x_h = \Pi_h x = \Pi_h A^{-1}f$  と書けることに注意する。また、 $A|_{X_h} : X_h \rightarrow Y'_h$  は、 $X_h$  と  $Y'_h$  の間の同型写像になるので、作用素  $P_h$  を  $P_h := A\Pi_h A^{-1}$  と定義すると、 $P_h$  は  $Y'$  から  $Y'_h$  への射影作用素になる。

ここで、作用素  $F_h : X \rightarrow Y'$  を

$$(2.1) \quad F_h(x) := (I_{Y'} - P_h)Ax + P_h F(x), \quad F(x) := Ax - f, \quad x \in X$$

と定義する。ただし、 $I_{Y'}$  は、 $Y'$  上の恒等写像である。この作用素  $F_h$  を、Fink-Rheinboldt の離散化作用素と呼ぶことにしよう。この時、次の補題が成り立つ：

**補題 2.1** (Fink-Rheinboldt [4]) 作用素  $F_h : X \rightarrow Y'$  を(2.1)で定義するとき、 $x \in X$  が方程式  $F_h(x) = 0$  の解であるための必要十分条件は、 $x \in X_h$  であり、かつ  $x = \Pi_h A^{-1}f$  である（つまり、 $x \in X_h$  は、Galerkin 解である）ことである。

**証明：**証明は簡単なので省略する。[4, Lemma 5.1] を参照。□

$F_h$  の定義はもっと簡単になるが、(2.1)のように定義しておく、非線形方程式への拡張が容易になることが、後にわかるだろう。

つぎに、別の連続双線形写像  $b : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  を導入し、上の方程式を  $b$  によって“摂動した”方程式

$$(2.2) \quad a(w, y) + b(w, y) = f(y), \quad \forall y \in Y$$

を考えることにしよう。もちろん、この方程式の Galerkin 解  $w_h \in X_h$  は、

$$(2.3) \quad a(w_h, y_h) + b(w_h, y_h) = f(y_h), \quad \forall y_h \in Y$$

によって定義される。上と同様に、連続双線形写像  $b : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  から

$$(2.4) \quad \langle Bx, y \rangle := b(x, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

によって、作用素  $B \in \mathcal{L}(X, Y')$  が定義される。方程式(2.2)は、 $Ax + Bx = f \in Y'$  と書くことができる。また、Galerkin 方程式(2.3)は、

$$\langle Aw_h, y_h \rangle = \langle -Bw_h + f, y_h \rangle, \quad \forall y_h \in Y_h$$

と書けるが、これは  $w_h$  が  $w_h = \Pi_h A^{-1}(-Bw_h + f)$  という  $X_h$  上の方程式の解であることを意味する。ここで、 $F(x) := Ax + Bx - f$  とおいた上で(2.1)で作用素  $F_h : X \rightarrow Y$  を定義すると、方程式  $F_h(w) = 0$  は

$$\begin{aligned} (I_{Y'} - P_h)Aw + P_h(Aw + Bw - f) &= (A + P_h B)w - P_h f \\ &= A(w + \Pi_h A^{-1}(Bw - f)) = 0 \end{aligned}$$

と書けるので、補題 2.1 は再び成り立つ。

以上の準備のもとで、方程式(2.2)に対する Galerkin 近似方程式の解  $w_h$  の誤差について考察しよう。次の定理が成り立つ：

**定理 2.2** 以下を仮定する。

- (1) 連続双線形写像  $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  は、定理 1.1 の条件を満たす。
- (2) 有限次元部分空間  $X_h \subset X, Y_h \subset Y$  と  $a$  の組み合わせに対して、定理 1.2, 系 1.3 の仮定が成り立つ。
- (3) 方程式(1.2)の真の解  $x \in X$  を、その Galerkin 解  $x_h \in X_h$  に対応させる射影  $\Pi_h$  に対して、

$$(2.5) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|x - \Pi_h x\|_X = 0, \quad \forall x \in X$$

が成り立つ。

- (4) 連続双線形写像  $b : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  から(2.4)によって定義される作用素  $B \in \mathcal{L}(X, Y')$  は、compact であり、写像  $A + B \in \mathcal{L}(X, Y')$  は、 $X$  と  $Y'$  の間の同型写像である。

この時、十分小さい  $h > 0$  に対しては、(2.2)の真の解  $w$  に対する Galerkin 近似方程式(2.3)は一意解  $w_h \in X_h$  を持ち、さらに次の誤差評価が成り立つ：

$$(2.6) \quad \|w_h - \Pi_h w\|_X \leq C \|w - \Pi_h w\|_X.$$

ただし、 $C$  は、 $h$  に依存しない正定数である。

Fredholm の交代定理より、 $\text{Ker}(A + B) = \{0\}$  ならば  $A + B$  が同型写像になることがわかる。定理 2.2 を示すために、まず次の補題を示そう：

**補題 2.3** 射影作用素  $P_h : Y' \rightarrow Y'_h$  が、

$$\|P_h\|_{\mathcal{L}(Y', Y')} \leq C, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|f - P_h f\|_{Y'} = 0, \quad \forall f \in Y'$$

を満たすとする。ただし、 $C$  は  $h > 0$  に依存しない正定数である。この時、任意の compact 作用素  $K \in \mathcal{K}(X, Y')$  に対して、 $\lim_{h \rightarrow 0} \|(I_{Y'} - P_h)K\|_{\mathcal{L}(X, Y')} = 0$  が成り立つ。

**証明:** 背理法による。補題の主張が成り立たないとしよう。すると、ある正数  $\varepsilon > 0$  が存在し、任意の正整数  $k$  に対してある  $h < 1/k$  があって、

$$\|(I_{Y'} - P_h)K\|_{\mathcal{L}(X, Y')} \geq \varepsilon$$

となっている。このような  $h$  については、ある  $x_k \in X$  が存在して、

$$\|x_k\|_X \leq 1, \quad \|(I_{Y'} - P_h)Kx_k\|_{Y'} \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

となっている。作用素  $K$  の compact 性より、 $\{x_k\}$  の適当な部分列  $\{x_{k'}\}$  をとると、列  $\{Kx_{k'}\}$  はある  $f$  に強収束する:  $\lim_{k' \rightarrow \infty} \|Kx_{k'} - f\|_{Y'} = 0$ 。よって、

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} &\leq \|(I_{Y'} - P_h)Kx_{k'}\|_{Y'} \leq \|(I_{Y'} - P_h)f\|_{Y'} + \|(I_{Y'} - P_h)(f - Kx_{k'})\|_{Y'} \\ &\leq \|(I_{Y'} - P_h)f\|_{Y'} + (1 + C)\|f - Kx_{k'}\|_{Y'} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となり矛盾を得る。□

**定理 2.2 の証明:** まず、 $w_h \in X_h$  が Galerkin 近似方程式(2.3) の解になるためには、

$$F_h(w_h) = 0 \iff (A + P_h B)w_h = P_h f \iff A(w_h + \Pi_h A^{-1} B w_h) = A \Pi_h A^{-1} f$$

が必要十分条件であることを思い出そう。ただし、 $P_h := A \Pi_h A^{-1}$  であった。ここで、 $h > 0$  に依存しない定数  $L > 0$  が存在し、十分小さなすべての  $h > 0$  について

$$(2.7) \quad \|(A + P_h B)v_h\|_{Y'} \geq L\|v_h\|_X, \quad \forall v_h \in X_h$$

が成り立つことを示そう。最初に、(1.9), (1.10), (2.5) に注意すると、射影  $P_h: Y' \rightarrow Y'_h$  は補題 2.3 の仮定を満たすので、 $\lim_{h \rightarrow 0} \|(I_{Y'} - P_h)B\|_{\mathcal{L}(X, Y')} = 0$  であることを注意する。さらに、

$$\begin{aligned} \|(A + P_h B)v_h\|_{Y'} &= \|(A + B)v_h - (I_{Y'} - P_h)Bv_h\|_{Y'} \\ &\geq \left( \|(A + B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y', X)}^{-1} - \|(I_{Y'} - P_h)B\|_{\mathcal{L}(X, Y')} \right) \|v_h\|_X \end{aligned}$$

なので、

$$\frac{1}{2} \|(A + B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y', X)}^{-1} \geq \|(I_{Y'} - P_h)B\|_{\mathcal{L}(X, Y')}$$

となるように  $h > 0$  を十分小さくすれば、 $L := \frac{1}{2} \|(A + B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y', X)}^{-1}$  に対して(2.7)が成り立つ。不等式(2.7)は、作用素  $(A + P_h B)|_{X_h}: X_h \rightarrow Y'_h$  が単射であることを意味する。部分空間  $X_h$  は有限次元で、定理 1.2 の仮定より  $X_h$  と  $Y_h$  の次元は同じなので、 $(A + P_h B)|_{X_h}: X_h \rightarrow Y'_h$  は同型写像を与える。よって、Galerkin 解  $w_h$  の一意存在が示された。

不等式(2.6)は、 $w_h - \Pi_h w$  を(2.7)の  $v_h$  に代入し、

$$(A + P_h B)(w_h - \Pi_h w) = P_h B(w - \Pi_h w)$$

を使えば  $C := L^{-1} \|P_h B\|_{\mathcal{L}(X, Y')} = 2 \|(A + B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y', X)} \|P_h B\|_{\mathcal{L}(X, Y')}$  として得られる。□

系 2.4 定理 2.2 の仮定が全て成り立っているとする。この時、十分小さい  $h > 0$  に対して、方程式(2.2)の真の解  $w$  とその Galerkin 解  $w_h$  の誤差評価として、次の不等式が成り立つ:

$$\|w - w_h\|_X \leq (1 + C)\|w - \Pi_h w\|_X \leq (1 + C) \left(1 + \frac{M}{\eta}\right) \inf_{v_h \in X_h} \|w - v_h\|_X.$$

ただし、 $M, \eta, C$  は、それぞれ定理 1.2, 系 1.3, 定理 2.2 に現れる正定数である。よって、特に

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in X_h} \|w - v_h\|_X = 0 \implies \lim_{h \rightarrow 0} \|w - w_h\|_X = 0$$

が成り立つ。□

Remarks: (1) この節で述べた結果は、[3] に書いてある。(この文献[3]は電気通信大学の加古孝先生に教えて頂きました。感謝いたします。)しかし、その他の主要な教科書に書かれていないので、いろいろな人によりいろいろな形で再発見されている。例えば、[5], [6]などをみよ。加古孝先生自身も、[3]を読む前に、この節の結果を見つけていたそうです。

(2) 上の議論を注意深く読むと、compact 作用素  $B: X \rightarrow Y'$  の線形性は、“ほとんど”使っていないことがわかる。実際、上の議論は  $B$  が非線形 compact 作用素の場合に直ちに拡張できる。それを次の節で説明しよう。

### 3 非線形写像の場合への拡張

前節までで、連続双線形写像から定義される線形方程式と、その compact 作用素による摂動に対する Galerkin 近似解の存在と誤差について議論した。この節では、これまでの議論が、あるタイプの非線形方程式に直ちに拡張されることをみる。

考える方程式は次のようなものである。 $X, Y$  を Hilbert 空間とし、連続双線形写像  $a: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  は、定理 1.1 の条件を満たすとする。線形作用素  $A: X \rightarrow Y'$  は、 $a$  から定義される線形作用素である（つまり、 $\langle Ax, y \rangle := a(x, y), \forall x \in X, \forall y \in Y$  である）。Hilbert 空間  $X$  のある開集合  $U \subset X$  上で定義された（非線形）作用素  $B: U \rightarrow Y'$  が与えられたとして、 $f \in Y'$  に対して方程式

$$\langle Ax, y \rangle + \langle B(x), y \rangle = \langle f, y \rangle, \quad \forall y \in Y$$

を考える。あるいは、 $f \in Y'$  も作用素  $B$  にこめて考えるとして（つまり、 $B(x) - f$  をあらためて  $B(x)$  と書くことにして）、

$$(3.1) \quad \langle Ax, y \rangle + \langle B(x), y \rangle = 0, \quad \forall y \in Y$$

を考えることとしてもよい。

さて、方程式  $Ax + B(x) = 0$  の解  $x$  の Galerkin 近似解の存在とその誤差について議論するが、その際次のことを仮定しよう。  $X, Y$  は Hilbert 空間で、  $X_h \subset X, Y_h \subset Y$  は有限次元部分空間である。

**仮定 3.1** (1) 非線形作用素  $B$  は、  $U$  上で  $C^1$  級である。方程式  $F(x) := Ax + B(x) = 0$  の解  $x_0 \in U$  が存在し、かつ  $DF(x_0) = A + DB(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y')$  は  $X$  と  $Y'$  の間の同型写像を与える。

(2) Fréchet 微分  $B(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y')$  は、compact 作用素であり、双線形写像  $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  は、定理 1.1 の仮定を満たすとする。

(3) 有限次元部分空間  $X_h \subset X, Y_h \subset Y$  と  $a$  の組み合わせに対して、定理 1.2, 系 1.3 の仮定が成り立つ。

(4) 方程式(1.2)の真の解  $x \in X$  を、その Galerkin 解  $x_h \in X_h$  に対応させる射影  $\Pi_h$  に対して、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|x - \Pi_h x\|_X = 0, \quad \forall x \in X$$

が成り立つ。

(5) 作用素  $F := A + B : U \rightarrow Y'$  の Fréchet 微分  $DF(x) = A + DB(x)$  は、任意の開凸集合  $\mathcal{O} \subset U$  上で Lipschitz 連続であるとする：つまり、各開凸集合  $\mathcal{O} \subset U$  に対して正定数  $C(\mathcal{O})$  が存在し、

$$\|DF(x) - DF(y)\|_{\mathcal{L}(X, Y')} \leq C(\mathcal{O}) \|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in \mathcal{O}$$

が成り立つ。□

議論の基本となるのは、Kantorovich の定理（の簡略版）である。Kantorovich の定理の証明はいろいろな教科書に載っていますが、例えば、[9] を見てください。

**定理 3.2 (Kantorovich の定理)**  $A, B$  を Banach 空間とする。開凸集合  $\mathcal{O} \subset A$  上で定義された作用素  $f : \mathcal{O} \rightarrow B$  は  $C^1$  級写像で、次の仮定を満たすとする：

- (1) ある点  $z_0 \in \mathcal{O}$  において、Fréchet 微分  $Df(z_0) \in \mathcal{L}(A, B)$  は、 $A$  と  $B$  の間の同型写像であるとする。一般性を失わずに  $f(z_0) \neq 0$  と仮定する。
- (2)  $\mathcal{O}$  内で Fréchet 微分  $Df(x)$  は Lipschitz 連続であるとする。つまり、ある正定数  $K$  が存在し、

$$\|Df(z_0)^{-1}(Df(x) - Df(y))\|_{\mathcal{L}(A, A)} \leq K \|x - y\|_A, \quad \forall x, y \in \mathcal{O}$$

が成り立つ。

- (3) 定数  $\eta$  と  $h$  を、 $\eta := \|Df(z_0)^{-1}f(z_0)\|_A, h := K\eta$  と定義すると、 $h \leq \frac{1}{2}$  が成り立つ。
- (4) 定数  $t^*, t^{**}$  ( $t^* \leq t^{**}$ ) を、優越方程式 (majorant equation)  $g(t) := \frac{1}{2}Kt^2 - t + \eta$  の 2 つの実解とする。さらに、 $z_1 := z_0 - Df(z_0)^{-1}f(z_0)$ ,

$$B(z_1, t^* - \eta) := \{z \in A \mid \|z - z_1\|_A < t^* - \eta\}$$



と定義すると,  $\overline{B(z_1, t^* - \eta)} \subset \mathcal{O}$  が成り立つ.

この時, 方程式  $f(z) = 0$  の解  $z^* \in \overline{B(z_1, t^* - \eta)}$  が存在する. この解は,  $B(z_0, t^{**}) \cap \mathcal{O}$  ( $h < \frac{1}{2}$  の時), あるいは  $\overline{B(z_0, t^{**})} \cap \mathcal{O}$  ( $h = \frac{1}{2}$  の時) で一意である. さらに, 次の誤差評価が成り立つ:

$$\|z^* - z_0\|_A \leq t^* = \frac{2\eta}{1 + \sqrt{1 - 2h}}. \quad \square$$

さて, 方程式(3.1)の解  $x_0 \in U$  の Galerkin 近似解  $x_h \in X_h \cap U$  は, もちろん

$$(3.2) \quad \langle Ax_h, y_h \rangle + \langle B(x_h), y_h \rangle = 0, \quad \forall y_h \in Y_h$$

で定義する. この Galerkin 解の局所一意存在を示すために, 再び Fink-Rheinboldt の離散化作用素(2.1)

$$F_h(x) := (I_{Y'} - P_h)Ax + P_hF(x), \quad F(x) := Ax + B(x)$$

を使う. ただし,  $P_h := A\Pi_h A^{-1}$  であった. Fink-Rheinboldt の離散化作用素(2.1)は,  $F_h(x) = Ax + P_hB(x)$  と書き直すことができることに注意すると, 補題 2.1 が再び成り立つことがわかる. つぎの定理が, この節の主定理である.

**定理 3.3** 仮定 3.1 が成り立つとすると, 十分小さな  $h > 0$  に対して方程式(3.2)を満たす Galerkin 解  $x_h \in X_h$  が局所的に一意に存在し, さらに誤差評価

$$(3.3) \quad \|x_h - \Pi_h x_0\|_X \leq C \|x_0 - \Pi_h x_0\|_X$$

が成り立つ. ただし,  $C$  は  $h$  に依存しない正定数である.

**証明:** 設定

$$\begin{aligned} A &:= X_h \text{ with norm } \|x_h\|_X, & z_0 &:= \Pi_h x_0, \\ B &:= Y'_h \text{ with norm } \|f\|_{Y'}, & f &:= F_h \end{aligned}$$

のもとで, Kantorovich の定理を応用することを考える. 簡単のために, この証明内では,  $B := DB(x_0) \in \mathcal{K}(X, Y')$  と書く. すると,  $DF_h(\Pi_h x_0) = A + P_h DB(\Pi_h x_0) = A + P_h B + P_h(DB(\Pi_h x_0) - B)$  である. 定理 2.2 の証明と同様に,  $h > 0$  に依存しない定数  $L > 0$  が存在し, 十分小さなすべての  $h > 0$  について

$$(3.4) \quad \|DF_h(\Pi_h x_0)v_h\|_{Y'} \geq L \|v_h\|_X, \quad \forall v_h \in X_h$$

が成り立つことを示そう. 証明もほとんど同様だが, 念のためにもう一度書いておく. 最初に, (1.9), (1.10), (2.5) に注意すると, 射影  $P_h: Y' \rightarrow Y'_h$  は補題 2.3 の仮定を満たすので,  $\lim_{h \rightarrow 0} \|(I_{Y'} - P_h)B\|_{\mathcal{L}(X, Y')} = 0$  であることを注意する. さらに,

$$\begin{aligned} \|DF_h(\Pi_h x_0)v_h\|_{Y'} &= \|(A + B)v_h - (I_{Y'} - P_h)Bv_h + P_h(DB(\Pi_h x_0) - DB(x_0))v_h\|_{Y'} \\ &\geq \left( \|(A + B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y', X)}^{-1} - \omega(h) \right) \|v_h\|_X \end{aligned}$$

に注意する。ただし,

$$\omega(h) := \|(I_{Y'} - P_h)B\|_{\mathcal{L}(X, Y')} + \|P_h(DB(\Pi_h x_0) - DB(x_0))\|_{\mathcal{L}(X, Y')}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \|(I_{Y'} - P_h)B\|_{\mathcal{L}(X, Y')} + C\|P_h\|_{\mathcal{L}(Y', Y')} \lim_{h \rightarrow 0} \|x_0 - \Pi_h x_0\|_X = 0$$

である。よって,

$$\frac{1}{2} \|(A + B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y', X)}^{-1} \geq \omega(h)$$

となるように  $h > 0$  を十分小さくすれば,  $L := \frac{1}{2} \|(A + B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y', X)}^{-1}$  に対して (3.4) が成り立つ。条件 (3.4) は, Fréchet 微分  $DF_h(\Pi_h x_0)$  が  $X_h$  から  $Y'_h$  への単射であることを示している。条件より,  $X_h$  と  $Y_h$  の次元は等しいので,  $DF_h(\Pi_h x_0)|_{X_h} \in \mathcal{L}(X_h, Y'_h)$  は同型写像であることに注意する。つまり, Kantorovich の定理の条件 (1) は満たされる。

Kantorovich の定理の条件 (2) が成り立つことは, 仮定 3.1(5) から明らかである。

次に,

$$(3.5) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|DF_h(\Pi_h x_0)^{-1} F_h(\Pi_h x_0)\|_X = 0$$

であることを示す。実際,

$$\begin{aligned} \|F_h(\Pi_h x_0)\|_{Y'} &= \|P_h F(\Pi_h x_0)\|_{Y'} \leq \|P_h\|_{\mathcal{L}(Y', Y')} \|F(\Pi_h x_0) - F(x_0)\|_{Y'} \\ (3.6) \quad &\leq \|P_h\|_{\mathcal{L}(Y', Y')} \left( \int_0^1 \|DF((1-t)\Pi_h x_0 + tx_0)\|_{\mathcal{L}(X, Y')} dt \right) \|x_0 - \Pi_h x_0\|_X \\ &\leq CC_2 \|x_0 - \Pi_h x_0\|_X \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

が成り立つので, (3.5) がわかる。よって, Lipschitz 定数  $K$  に対して,  $K\eta < \frac{1}{2}$ ,  $\eta := \|DF_h(\Pi_h x_0)^{-1} F_h(\Pi_h x_0)\|_X$  となるように  $h$  を十分小さくとれば, Kantorovich の定理の条件 (3), (4) も満たされる。

よって, Kantorovich の定理の条件がすべて満たされるので, ある  $x_h \in X_h$  が存在して, 方程式  $F_h(x_h) = 0$  を満たす。補題 2.1 より, この  $x_h$  は Galerkin 近似方程式 (3.2) の解である。さらに, Kantorovich の定理の最後の評価式と (3.6) より

$$\|x_h - \Pi_h x_0\|_X \leq 2\eta = 2\|DF_h(\Pi_h x_0)^{-1} F_h(\Pi_h x_0)\|_X \leq C\|x_0 - \Pi_h x_0\|_X$$

がわかるので, (3.3) が示される。□

**系 3.4** 定理 3.3 の仮定が全て成り立っているとする。この時, 十分小さい  $h > 0$  に対して, 方程式 (3.1) の真の解  $x_0$  とその Galerkin 解  $x_h$  の誤差評価として, 次の不等式が成り立つ:

$$\|x_0 - x_h\|_X \leq (1 + C)\|x_0 - \Pi_h x_0\|_X \leq (1 + C) \left( 1 + \frac{M}{\eta} \right) \inf_{v_h \in X_h} \|x_0 - v_h\|_X.$$

ただし,  $M, \eta, C$  は, それぞれ定理 1.2, 系 1.3, 定理 3.3 に現れる正定数である. よって, 特に

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in X_h} \|x_0 - v_h\|_X = 0 \implies \lim_{h \rightarrow 0} \|x_0 - x_h\|_X = 0$$

が成り立つ.  $\square$

**Remark:** この節で述べた結果も, (多分) すでによく知られている. 例えば, [2] の結果は, パラメータ付きの非線形方程式の有限要素近似についてであるが, (少し見掛けはちがっていても) この節で述べたことと本質的に同様な議論が展開されている. ただし, 線形, 非線形の場合ともまったく同様に Galerkin 近似の誤差解析の理論が展開できることを注意したのは, この論文が初めてかも知れない. この節の結果は, さらに非線形性が強い方程式に対して拡張できる [8]. しかし, そこでの結果を有限要素法の誤差解析に応用しようとする, 領域の滑らかさに強い仮定が必要である. もう少しうまい方法があるような気がするが, どうすればいいのか現時点 (2004 年の初め) では良くわからない.

## 参考文献

- [1] I. Babuška, A.K. Aziz, Survey Lectures on the Mathematical Foundations of the finite element method, in "The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations", edited by A.K. Aziz, Academic, 1972.
- [2] F. Brezzi, J. Rappaz, P.A. Raviart, Finite dimensional approximation of nonlinear problems. Part I. Branches of nonsingular solutions, *Numer. Math.* 36 (1980) 1–25.
- [3] S.G. Mikhlin, Variational Methods in Mathematical Physics, Pergamon, 1964.
- [4] W.C. Rheinboldt, Numerical Analysis of Parametrized Nonlinear Equations, Wiley, 1986.
- [5] A.H. Schatz, An Observation concerning Ritz-Galerkin methods with indefinite bilinear forms, *Math. Comp.*, 28 (1974) 959–962.
- [6] T. Tsuchiya, K. Yoshida, S. Ishioka, Yamamoto's principle and its applications to precise finite element error analysis, *J. Comp. Appl. Math.*, 152 (2003) 507–532.
- [7] <http://daisy.math.sci.ehime-u.ac.jp/users/tsuchiya/math/fem/>
- [8] T. Tsuchiya, An application of the Kantorovich theorem to nonlinear finite element analysis, *Numer. Math.* 84 (1999) 121–141.
- [9] T. Yamamoto, A method for finding sharp error bounds for Newton's method under the Kantorovich assumptions, *Numer. Math.* 49 (1986) 203–220.